UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

S E G U N D O E X A M E N P A R C I A L : TIPO D
[duración : una hora y 45 minutos]

S O L U C I O N E S

SE1.- (10 ptos.) Sea r la recta intersección de los dos planos de ecuaciones
$x+y-z = 0$, $x -y+3z =6$;

1a) Halle una ecuación del plano, α , que contiene la recta r y es paralelo al vector $\mathbf{u} = (2, -1 , 3)$;

Hallemos previamente ecuaciones paramétricas de la recta r :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+3z=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=3-t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{cases} ;$$

nos percatamos que $A(3,-3,0)$ es un punto de la recta r y $(l, m, n)=(-1, 2, 1)$ un vector paralelo a r;

Como el plano , α , buscado, pasa por A y es paralelo a los dos vectores $(l, m, n)=(-1, 2, 1)$,

$\mathbf{u} = (2, -1 , 3)$, podemos hallar un vector normal al plano :

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (7 , 5 -3) \text{ y escribir una ecuación del plano :}$$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0 \Rightarrow 7(x-3)+5(y+3)-3(z-0) = 0 \Rightarrow 7x+5y-3z-6 = 0.$$

Nota. Acerca de otros métodos para resolver la parte **1a** vea las dos observaciones en la hoja #3.

1b) halle el seno del ángulo agudo que forma el plano α con la recta, s, de ecuaciones
$2x=3y=z$.

Como ecuaciones paramétricas de la recta s son : $\begin{cases} x=t/2 \\ y=t/3 \\ z=t \end{cases}$, un vector paralelo a la recta s es

$\mathbf{v}= 6(1/2;1/3;1) = (3, 2, 6)$.

El ángulo agudo, φ, que forman la recta s y el plano α dados, es igual al complemento del ángulo, ψ , que forma la recta dada con la normal al plano dado. Por consiguiente tenemos

$$\text{sen}(\varphi)=\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)=\cos(\psi)= \frac{(3, 2, 6).(7 , 5 -3)}{\sqrt{9+4+36}\sqrt{49+25+9}} = \frac{13}{7\sqrt{83}} .$$

2.- (5 ptos.) Dados los ptos. $A(2, 5, 7)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 2, 7)$, halle el área del triángulo de vértices A, B, C.

Area del triángulo ABC = $\frac{1}{2} |\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC}|$; AB = (-1,-5,-6) , **AC**=(-1,-3, 0) ,

$$\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-18, 6,-2) \Rightarrow$$

$$\text{área} = \frac{1}{2} |\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC}| = |(-9, 3,-1)| = \sqrt{91} \text{ unidades cuadradas de medida.}$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

S E G U N D O E X A M E N P A R C I A L : TIPO D
[duración : una hora y 45 minutos]

S O L U C I O N E S

3.(6 ptos.)En el espacio vectorial, $\mathbf{P_3}$, [de todos los polinomios de grado menor o igual que 3] , considere los polinomios: $p_1= t^3+t$, $p_2= t^3+ t^2$, $p_3= t^3+2t^2+1$, $p_4= t^2+1$;
3a.Halle las condiciones sobre a, b, c para que el polinomio at^3+3t^2+bt+c pertenezca al subespacio W = gen{ p_1, p_2, p_3, p_4 } ;
El polinomio at^3+3t^2+bt+c pertenece al subespacio W si y sólo si existen números x_1 , x_2 , x_3 , x_4 tales que :
$x_1(t^3+t)+x_2(t^3+ t^2)+x_3(t^3+2t^2+1)+x_4(t^2+1) = at^3+3t^2+bt+c$, $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)t^3+(x_2+2x_3+x_4)t^2+(x_1)t+(x_3+x_4) = at^3+3t^2+bt+c$ luego el polinomio at^3+3t^2+bt+c pertenece al subespacio W si y sólo si es consistente el siguiente sistema :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ x_2+2x_3+x_4=3 \\ x_1=b \\ x_3+x_4=c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-3-b+a \end{array}\right]$$

por lo tanto el sistema es consistente si y sólo si $c-3-b+a = 0$;

3b. diga, justificando, si el polinomio t^3+3t^2+4t+2 pertenece o no al subespacio W.
Como para este polinomio a=1,b=4,c=2 , $\Rightarrow c-3-b+a = 2-3-4+1 = -4 \neq 0$, el polinomio t^3+3t^2+4t+2 <u>no pertenece</u> al subespacio.

4.(4 ptos.) En el espacio vectorial, $V = M_{2,2}$ de las matrices de tamaño 2x2, averigüe para cada uno de los subconjuntos que se definen a continuación, si es o no es subespacio de V :

4a. $W_1 = \{ H=[a_{ij}] \in V \mid a_{ij}= - a_{ji} \}$ = subconjunto de todas las matrices antisimétricas ;
S4a. W_1 es subespacio, ya que (por ejemplo) la matriz nula es antisimétrica y además :
$A=[a_{ij}] \in W_1$, $B=[b_{ij}] \in W_1 \Rightarrow a_{ij}=-a_{ji}, b_{ij}=-b_{ji} \Rightarrow$
para la matriz suma $C=A+B=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$ se cumple : $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=-a_{ji}+(-b_{ji})=- c_{ji}$
[cierre de W_1 respecto a la suma de vectores] y tambien :
$A=[a_{ij}] \in W_1$, $\lambda\in R \Rightarrow$ para la matriz $D=\lambda A=[\lambda a_{ij}]$ se cumple $d_{ij}=\lambda a_{ij}=\lambda(-a_{ji})=-d_{ji}$
[cierre de W_1 respecto a la multiplicación de vectores por números] .

S4b. $W_2 = \{ H=[a_{ij}] \in V \mid a_{11}a_{22} =0 \}$ = subconjunto de todas las matrices para las cuales el producto de las dos componentes de su diagonal es nulo .
W_2 <u>no es</u> subespacio, ya que no cumple con la propiedad de cierre respecto a la suma. En efecto, si por ejemplo $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W_2$ resulta $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin W_2$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

S E G U N D O E X A M E N P A R C I A L : TIPO D
[duración : una hora y 45 minutos]

S O L U C I O N E S

Observaciones para el ejercicio #1, parte 1a.

Observación 1.

Una manera de hallar un vector (l, m, n) , paralelo a la recta r, podía ser tambien :

$$(l, m, n) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -4, -2) = 2(1 , -2, -1)$$

[ya que esta recta, intersección de los dos planos dados, es paralela a ámbos planos y por lo tanto perpendicular a ámbos vectores normales de los mismos planos];

Observación 2.

Otra manera de hallar la ecuación del plano, α , es la siguiente :
observemos que cualesquiera que sean los números (no ámbos nulos) λ, μ, la ecuación :
$\lambda(x+y-z)+\mu(x -y+3z -6)=0$ representa un plano que contiene a la recta r [ya que una ecuación de primer grado en x, y, z, representa, en un sistema de coordenadas cartesianas, un plano y las coordenadas de todo punto de la recta r anulan las expresiones $x+y-z$, $x -y+3z -6$].
Si entonces ponemos la condición de que este plano sea paralelo al vector **u**= (2, -1 , 3), obtenemos :
$(a, b, c).(2, -1 , 3)= (\lambda+\mu , \lambda-\mu , -\lambda+3\mu).(2, -1 , 3)= 2(\lambda+\mu)-(\lambda-\mu)+3(-\lambda+3\mu) = 0 \Rightarrow$
$-2\lambda+12\mu=0$, condición que se cumple si por ejemplo $\lambda=6$, $\mu=1 \Rightarrow 7x+5y-3z-6 = 0$.